



TITLE:

# 2円柱を横切る流れの不安定性と遷移(複雑流体の数理解析とシミュレーション)

AUTHOR(S):

稲生, 洋一; 水島, 二郎

---

CITATION:

稲生, 洋一 ...[et al]. 2円柱を横切る流れの不安定性と遷移(複雑流体の数理解析とシミュレーション). 数理解析研究所講究録 2007, 1539: 179-192

ISSUE DATE:

2007-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59055>

RIGHT:

## 2 円柱を横切る流れの不安定性と遷移

同志社大学工学部 稲生 洋一 (Yoichi Ino)  
同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)  
*Department of Mechanical Engineering*  
*Doshisha University*

### 1. はじめに

2 円柱を過ぎる流れは一見非常に単純な流れであると思われるが、実際には複雑な現象を含んでいる。この流れは流体物理学では、物体後流(ウェイク)の相互作用のモデルとして研究されてきたが、航空工学における翼支柱を過ぎる流れや土木工学における橋脚を過ぎる流れなどへの応用研究としても調べられている。2 円柱の配置は、流れと平行配置のタンデム型と流れと垂直配置の並列型およびそれらのいずれでもない斜め型の3つに分類される。タンデム型2 円柱を過ぎる流れの研究は双翼型飛行機の翼を支える柱を過ぎる流れへの応用から始まっているため、研究者の主な関心は円柱の抗力係数や揚力係数に向けられてきた。一方、並列型2 円柱を過ぎる流れはパターン形成の問題として物理学的に注目されてきた。

タンデム型および並列型のいずれの場合にも、一様な流れの中に置かれた2 円柱を過ぎる流れにおいては、間隔比(円柱間距離/直径)を連続的に変えても円柱が受ける抗力係数はある間隔比を境に大きく不連続的に変化することが知られている[1]。タンデム型2 円柱を過ぎる流れの実験と数値計算の結果で共通しているのは、円柱間距離を連続的に変えたときある臨界距離を越えると流れのパターンが不連続的に変わることである。その臨界距離はレイノルズ数に依存するが、約  $3.5d$  であると見積もられてきた。このような臨界間隔の存在は Ishigai *et al.*[2] の実験によっても確認された。彼らはレイノルズ数が 1500–15000 の範囲で実験を行い、ストローハル数と表面圧力係数が急激な変化を示す  $3.8d$  付近に臨界間隔が存在することを示した。その後、このような物理量の不連続な変化については、Mizushima and Suehiro[3] により数値的に調べられ、その起源はヒステリシスを伴う解の分岐ダイアグラムから説明できることが明らかになった。

流れと垂直に配置された並列型2 円柱を過ぎる流れの研究は主に高いレイノルズ数( $Re = 10^3 \sim 10^4$ )における実験的研究が中心である。たとえば、Ishigai *et al.* は並列型2 円柱後流についても振動数を詳しく測定した。また、この実験で彼らは一方の円柱の側に偏向した流れが生じることを見だし、この偏向流が生じる原因はコアンダ効果によるものであると結論づけた。このような偏向流の存在は、かなり高いレイノルズ数においても出現することが Bearman and Wadcock によって確認された[5]。最近になって、Xu, Zhou and So[6] は熱線流速計や PIV を用いた実験を行い、円柱間距離が流れ構造へ与える影響を詳しく調べた。その結果、円柱間距離が小さいときには2 円柱後流は1つの渦列を形成するのに対し、円柱

間距離がある値を超えると円柱後流で2つの異なる周期の渦列が発生することを発見し、臨界レイノルズ数と円柱間距離の関係について整理を行った。

Williamson[4] は比較的低いレイノルズ数 ( $Re = 50 \sim 200$ ) で実験を行い、2円柱の後流は同期して同位相と逆位相の2つの流れパターンが生じることを確認した。また、同位相型の流れパターンでは、2対の渦列は2円柱直後で不安定となり、1対の大きな後流へと変化するのに対して、逆位相型の流れパターンでは逆位相の2対の渦列が安定して後方へ流されていくことを明らかにした。また、彼は2円柱を過ぎる流れの中に偏向流が生じる理由をコアンダ効果によるものであるとした Ishigai *et al.* の見解を否定し、2円柱を過ぎる流れに対して安定性理論を適用することを提案した。この提案に沿って Akinaga and Mizushima[7] は線形安定性解析を行い、円柱間距離を変えていくと、同位相型と逆位相型のモード変化が生じるのは対称定常流の不安定性のモードが交替するためであるということを見だし、その臨界円柱間距離を評価した。最近では、低いレイノルズ数 ( $Re = 40 \sim 160$ ) において、流れのパターンはレイノルズ数や円柱間距離の大きさによって、6つに分類できるという数値シミュレーションの結果も報告されている (Kang[8])。

並列型2円柱を過ぎる流れについて数多くの研究がなされているが、いずれの研究においても流れの分類は流れ場を特徴づける物理量や、流れパターンに着目して行われており、それぞれの流れが生じる原因については詳しく調べられていない。本研究では数値シミュレーションと線形安定性解析を行うことにより流れの遷移を調べ、さまざまな流れパターンが発生する起源を明らかにする。

## 2. 定式化と境界条件

一様流中におかれた2本の円柱を過ぎる流れを考える (図1)。円柱の直径を  $d$ 、2円柱の間隔を  $\ell$  とする。図1のように流れの方向に  $x$  軸、流れと垂直方向に  $y$  軸をとる。円柱の直径  $d$  を代表長さ、上流における一様速度  $U$  を代表速度とし、流れを特徴づけるパラメータとしてレイノルズ数  $Re$  と中心間隔比  $\Gamma$  をそれぞれ  $Re \equiv Ud/\nu$  および  $\Gamma \equiv \ell/d$  で定義する。ただし、 $\nu$  は流体の動粘性係数である。

2次元非圧縮流れを仮定し、流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  による定式を行う。渦度輸送方程式とポアソン方程式を無次元化した形で表すと

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathcal{N}(\psi, \omega) + \mathcal{M}\omega, \quad (1)$$

$$\omega = -\mathcal{M}\psi, \quad (2)$$

$$\mathcal{N}(\psi, \omega) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \mathcal{M} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

となる。ここで、 $\mathcal{M}$  は2次元ラプラシアンであり、 $\mathcal{N}$  は非線形項を表す。

無限に広い流れ場を図1のABCDで示される有限の領域で近似する。上流境界(AB)からは一様流が流入する。流出口(CD)での流出条件はゾンマーフェルト放

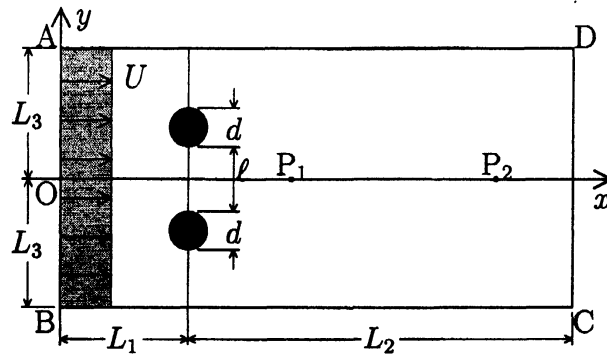


図 1: 2 円柱を横切る流れ.  $d$ : 円柱直径,  $l$ : 円柱間距離.

射条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

を用いる. ただし,  $c$  はこの境界から流出する波の位相速度であるが, 数値計算においては  $c$  として流出口 (CD) における各点の  $x$  方向速度  $u = \partial \psi / \partial y$  を用いる. また, 上下境界 (AD と BC) は十分遠方にとり, そこでは一様流であるとする. 円柱表面では滑りなし条件を適用する. この条件は円柱表面で

$$\psi = \psi_s, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (4)$$

が成り立つことを意味する. ここで,  $n$  は円柱表面に垂直方向の座標であり,  $\psi_s$  は各円柱表面での  $\psi$  の値である. これらの条件を用いるときはそれぞれの円柱表面での  $\psi_s$  の値が与えられないがぎり, 方程式 (1) と (2) の解を一意に決めることはできない. これらの  $\psi_s$  の値を求めるために, 流れ場全体で圧力が 1 価である条件を課す. この条件は, 流れ場中にとった任意の閉曲線  $C$  に沿って,

$$\oint_C \nabla p \cdot t ds = 0 \quad (5)$$

と表される. ここで,  $s$  と  $t$  はそれぞれの円柱を囲む任意の閉曲線  $C$  に沿った接線方向の座標とその方向の単位ベクトルを表す. 円柱表面上で滑りなし条件を適用すると, 圧力勾配  $\nabla p$  は簡単に

$$\nabla p = -\frac{1}{Re} \nabla \times \omega \quad (6)$$

と表せるので, ここでは, 円柱表面に沿って閉曲線  $C$  をとることにする.

### 3. 定常解の解析

低いレイノルズ数においては, 流れは 2 円柱間の中心を通る  $x$  軸に対して対称で定常である. 対称定常流に対応する解はレイノルズ数の大きさに関わらず境界

条件のもとで基礎方程式 (1) と (2) を満たすが、この流れはレイノルズ数がある値より大きいときは不安定となる。この対称定常流  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  が線形安定性解析の主流である。定常解は、次の定常渦度輸送方程式とポアソン方程式を満たす：

$$\mathcal{N}(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \bar{\omega} = 0, \quad (7)$$

$$\bar{\omega} = -\mathcal{M} \bar{\psi}. \quad (8)$$

式 (7) は式 (1) の時間微分項を 0 とおいた式であり、式 (8) のポアソン方程式と共に  $(\psi, \omega)$  と同様の境界条件のもとで解くことにより、定常解を求めることができる。ただし、流出口でのゾンマーフェルト放射条件は

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

となる。主流である対称定常解の計算では、 $x$  軸に対する対称性  $\bar{\psi}(x, -y) = -\bar{\psi}(x, y)$  および  $\bar{\omega}(x, -y) = -\bar{\omega}(x, y)$  を用いる。後に明らかにするように、対称定常流が不安定となって非対称定常流へ遷移するピッチフォーク分岐が生じることを今回見いだしたが、非対称定常流の数値解析にも式 (7) と式 (8) を用いる。

#### 4. 線形安定性解析

対称定常流 (主流) の不安定性を調べるために、主流  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  に攪乱  $(\psi', \omega')$  を加え、流れ関数と渦度  $(\psi, \omega)$  を対称定常流と攪乱の和で

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \omega = \bar{\omega} + \omega' \quad (10)$$

と表す。式 (10) を基礎方程式 (1) に代入し式 (7) を引くと、攪乱  $\omega'$  の時間発展を支配する非線形攪乱方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{1}{Re} \mathcal{M} \omega' + \mathcal{N}(\psi', \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \omega') + \mathcal{N}(\psi', \omega') \quad (11)$$

が得られる。式 (11) において、攪乱  $(\psi', \omega')$  についての非線形項を無視し、攪乱の時間依存性を  $\psi' = \hat{\psi}(x, y) e^{\lambda t}$  および  $\omega' = \hat{\omega}(x, y) e^{\lambda t}$  のように仮定すると、線形攪乱方程式

$$\lambda \hat{\omega} = \frac{1}{Re} \mathcal{M} \hat{\omega} + \mathcal{N}(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \hat{\omega}) \quad (12)$$

が導かれる。攪乱が満たすポアソン方程式は式 (2) と同じで

$$\hat{\omega} = -\mathcal{M} \hat{\psi}. \quad (13)$$

と書ける。

攪乱が満たす境界条件は、円柱より十分上流 (AB) で  $(\hat{\psi}, \hat{\omega}) = (0, 0)$  であり、十分下流 (CD) でゾンマーフェルト放射条件である。また、計算領域側面境界 (AD

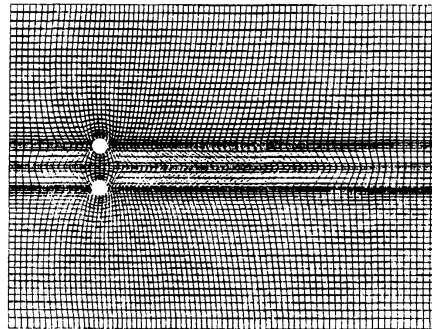


図 2: 計算格子の例.  $\Gamma = 1.5$

と BC) で攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\omega}) = (0, 0)$  であるとし, 円柱上では数値シミュレーションの場合と同様に滑りなし条件

$$\hat{\psi} = 0, \hat{\omega} = -\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial n^2} \quad (14)$$

を課す.

これらの境界条件のもとで式 (12) とポアソン方程式 (13) を連立して解いて主流の安定性を調べる. ここで, 係数  $\lambda$  は攪乱の複素線形増幅率であり, その実部  $\lambda_r$  と虚部  $\lambda_i$  はそれぞれ攪乱の線形増幅率と角速度 (振動数) を表す. 攪乱の線形増幅率  $\lambda_r$  が正のとき主流は不安定であり,  $\lambda_r < 0$  のとき安定である. すなわち,  $\lambda_r = 0$  となるときのレイノルズ数が臨界レイノルズ数  $Re_c$  である.

## 5. 数値計算法

並列型 2 円柱を過ぎる流れの安定性と遷移を調べるために, 数値シミュレーションと対称定常流 (主流) の線形安定性解析を行う. どちらの数値計算法においても, 流れ場を有限領域の離散格子点で代表し, 空間微分を有限差分で近似する. このとき, 直角座標を用いると数値計算には都合が良いが, 物理座標すなわち  $xy$  座標では 2 つの円形境界が存在するため, 変数変換を行って 2 円柱境界で一定値をとる新しい座標  $\xi\eta$  を導入する. ただし, 物理座標において  $\xi$  と  $\eta$  が一定曲線を描くと, それらは円柱境界では直交しているが内部領域では必ずしも直交している必要はない. 格子形成のために, 次のポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (15)$$

の解  $(\xi, \eta)$  を用いる. 式 (15) の右辺の関数  $P(\xi, \eta)$  と  $Q(\xi, \eta)$  は円柱表面付近に格子点が集中するように定める. その具体的な関数形を決める方法としては Steger and Sorenson[9] によって提案された方法を採用する. このとき,  $\xi$  は円柱表面に

沿うようにとり、 $\eta$  を円柱表面で  $\xi$  に直交するようにとる。また、 $\eta = \pm \Gamma/2$  は円柱表面である。この報告の全ての数値計算において図1の計算領域で  $L_1 = 5d$ ,  $L_2 = 40d$  および  $L_3 = \ell/2 + 9d$  とした。これらの値を用いれば、もっと広い領域をとった解きに比べても計算結果は2%以下の誤差しか生じないことを確認した。格子点の総数はパラメータ  $\Gamma$  の値によらず、 $199 \times 410$  にとり、最小格子幅は円柱表面近傍で  $0.01d$ 、最大格子幅は上下境界および流出口付近で  $0.1d$  となった。 $\Gamma = 1.5$  における計算格子の例を図2に示す。この図では格子点の形がよく見えるように実際に用いた格子点に比べて間引きを行って描いてあるが、格子は円柱近傍において密であり、円柱から離れるにしたがって疎になっている。これは、円柱近傍において速度場が急激に変動することを考慮に入れるためである。

数値シミュレーションにおいては、基礎方程式(1)と(2)の空間微分項を2次精度の中心差分法で近似し、式(1)の時間微分項を4次精度のルンゲ・クッタ(Runge-Kutta)法で近似して初期値・境界値問題として数値的に解いた。また、ポアソン方程式(2)の数値解法にはSOR(Successive Over Relaxation)法を用いた。このとき、緩和係数  $\epsilon$  には、レイノルズ数や間隔比の値によって異なる値を用いたが多くの場合には  $\epsilon = 1.5$  とした。ポアソン方程式の解の収束条件は、各格子点における  $(\psi, \omega)$  の逐次近似値の繰り返し計算前後の相対誤差の全計算領域にわたる合計が  $10^{-7}$  以下になったとき収束したとみなした。また、流れの定常状態の判定では、隣接した2つの時間ステップ間の  $\psi$  および  $\omega$  の相対誤差の合計がそれぞれ  $10^{-10}$  より小さくなったとき、流れが定常状態であると判断した。

SOR法は定常解(主流)や線形安定性解析の固有値問題を解くときにも使用した。定常解は式(7)と(8)を空間微分項を2次精度の中心差分法を用いて差分近似し、適切な境界条件で解くことで数値的に得られる。対称定常解の数値計算では、計算時間を節約するために  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  が  $x$  軸に対して反対称であることを用いた。すなわち、 $\bar{\psi}(x, -y) = -\bar{\psi}(x, y)$ ,  $\bar{\omega}(x, -y) = -\bar{\omega}(x, y)$  として対称定常解の計算を行った。線形安定性解析の固有値問題においても、空間微分項を2次精度の中心差分法で近似し、SOR法により解を求めた。ここで行った線形安定性解析では、最も不安定である最大増幅モードの固有関数は対称性、すなわち  $\hat{\psi}(x, -y) = \hat{\psi}(x, y)$ ,  $\hat{\omega}(x, -y) = \hat{\omega}(x, y)$  をもつので、この対称性を数値計算に用いた。

## 6. 計算結果

ここでは、2本の円柱間距離が比較的狭く円柱直径よりも小さいとき、すなわち  $\Gamma \leq 1$  の場合を中心に数値シミュレーションと線形安定性解析により、流れの安定性とその遷移について詳しく調べる。計算の結果、円柱間距離の違いによる流れの安定性特性変化が顕著に見られるのは、 $\Gamma \sim 0.5 - 0.62$  の範囲であることがわかったので、円柱間距離が  $\Gamma = 0.5, 0.6$  および  $0.62$  の3つの特徴的な場合について、レイノルズ数を大きくしていくとどのように流れ場のパターン変化が変化し、流れがどのように遷移するか紹介する。

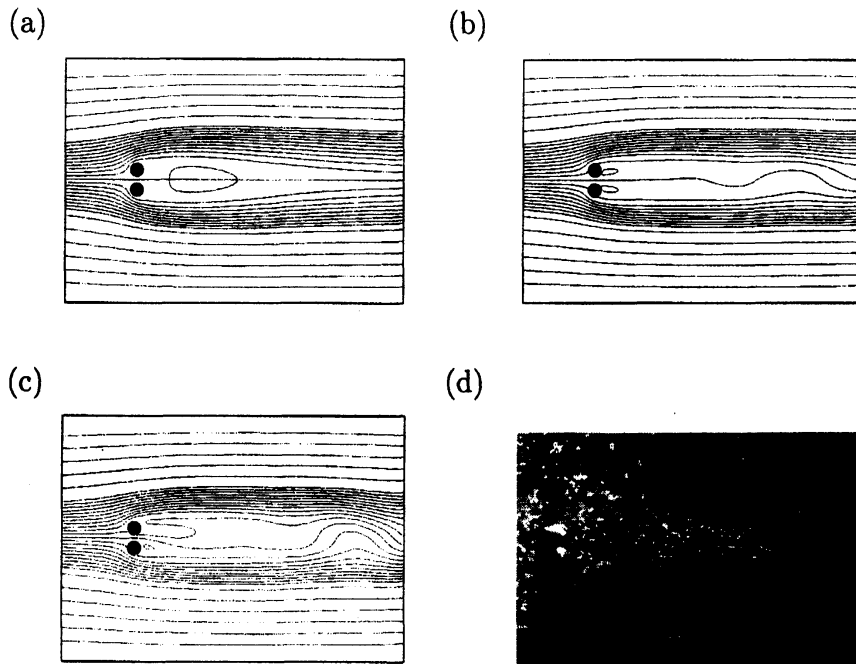


図 3: 流れパターン (流線) および可視化写真.  $\Gamma = 0.5$ . (a) 対称定常流,  $Re = 20$ . (b) 振動流,  $Re = 50$ . (c) 偏向振動流,  $Re = 60$ . (d) 偏向振動流 (可視化写真),  $Re = 60$ .

レイノルズ数が小さいときには2円柱を過ぎる流れは常に対称定常流である。間隔比が  $\Gamma = 0.5$  の場合にも、たとえば  $Re = 20$  では初期条件によらず図 3(a) のような対称定常流が実現される。この図では各円柱の背後には双子渦が現れず、2円柱と少し離れた場所に、1円柱後方に見られるような双子渦に似た1対の渦構造が見られることが特徴的である。すなわち、1対の2円柱があたかも1つの円柱と同じような役割を果たしている。そのことはもう少し大きなレイノルズ数、たとえば  $Re = 50$  での流れ場を見てみるとよりはっきりとわかる。図 3(b) に描かれているのは  $Re = 50$  のときの流れ場であり、流れは振動流となっている。しかも、流れの中で振動は2円柱からかなり離れた場所で顕著である。1円柱を過ぎる流れにおける振動はその双子渦の直後近くから始まるのとは異なり、2円柱のかなり後方から生じている。しかし、図 3(a) で見たように、双子渦が2円柱のずっと後方にできることを考えれば、1円柱の場合と同様に双子渦の後端あたりから振動が生じていると見ることもできる。さらにレイノルズ数が大きくなり、 $Re = 60$  (図 3(c)) では、 $Re = 50$  のときと同様に2円柱から離れた位置で流れが振動をしていることに加えて、2円柱間隙の直後で偏流の生じている。すなわち、 $Re = 50$  では1周期にわたって時間平均を行うと平均流は  $x$  軸に対して対称であったのが、 $Re = 60$  では平均流も非対称となっている。この流れは Kang[8] が同じ間隔比  $\Gamma = 0.5$  で  $Re = 70$  のときに求めた偏向パターン (deflected pattern) とほぼ同じ流れ場の形をしている。また、この流れパターンは可視化実験でも確認された (図 3(d))。この可視化実験では作業流体に水を用い、可視化剤としてトレーサー粒子



(オルガソル, 密度 1.03 g/cc, 直径 48 ~ 52 mm) を適量混入した. 写真の撮影では, スリット光源 (MORITEX, MHF-G150LR) から出るスリット光を 2 円柱と垂直に入射し, スリット光によって照らされたトレーサー粒子を水槽の下方からデジタル一眼レフカメラ (Nikon 製, D100) により撮影した. 撮影条件はシャッター速度 1 s, 絞りは 22 であった.

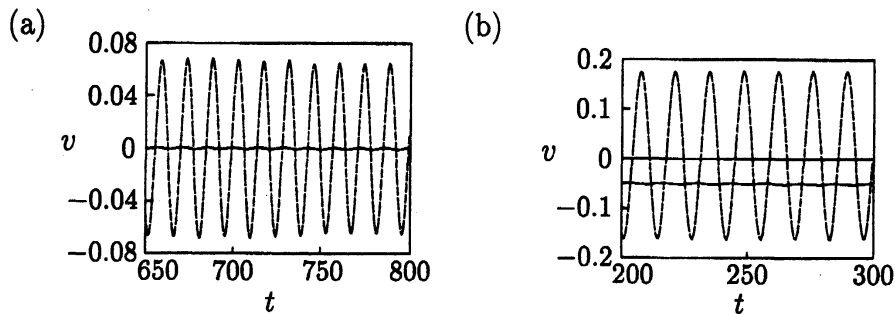


図 4: 点  $P_1$  における流速  $v_1$  と  $P_2$  における  $v_2$  の時系列.  $\Gamma = 0.5$ . (a)  $Re = 50$ . (b)  $Re = 60$ .

数値シミュレーションの結果,  $Re = 20$  では対称定常解しか得られなかったが,  $Re = 60$  では偏曲した振動流が見いだされた. この間に流れはいくつかの遷移を生じたと考えることができる.  $Re = 50$  で求められた振動流は伝播波攪乱による不安定性であり, ホップ分岐により生じたと想像できるが,  $Re = 60$  での偏曲した振動流が生じた原因とその解の分岐の構造はこれまでに知られていない. その起源を詳しく調べるために, 図 1 で示した 2 つの代表点  $P_1$  (2 円柱より  $2d$  後方) と  $P_2$  ( $14d$  後方) における  $y$  方向速度をそれぞれ  $v_1$  および  $v_2$  としてその時系列を図 4 に描いた. この図で,  $v_1$  は実線,  $v_2$  は破線で表されている.  $Re = 50$  (図 4 (a)) では  $v_2$  がおよそ 0.07 位の振幅で振動しているのに対して,  $v_1$  はほとんど 0 である. このことは先に述べたように, 流れの中の振動が 2 円柱よりかなり後方のみに限定されていることを表している. 一方,  $Re = 60$  (図 4 (b)) では  $v_2$  はほぼ 0 を中心として  $Re = 50$  のときの 2 倍程度の振幅 0.18 で振動しており,  $v_1$  はほぼ一定の 0.06 位の値をとっている. これらより, 流れ場は 2 円柱の直後と遠方の 2 つの領域に分断されており, それぞれの領域で異なる振る舞いをしていると想像できる.

流れが 2 つの領域で異なる分岐の構造をもっていることを確かめるために,  $Re = 50$  と 60 のときの対称定常流 (主流) を定常解の方法により計算し, それぞれのレイノルズ数でのある瞬間における流れ場から主流を差し引いた流れ場を数値的に求めた (図 5). この流れ場の差分を流れの中で成長した攪乱と見なすことにする. 図 5(a) は  $Re = 50$  での攪乱の流れ場である. この図から攪乱は確かに 2 円柱のかなり下流でのみ大きな値をもつことがわかる. また, 図 5(b) ( $Re = 60$ ) から 2 円柱直後に  $Re = 50$  のときには見られなかった攪乱が生じていることも確認できる. 2 円柱から離れたところの攪乱は時間と共に振動するが, この 2 円柱直後の攪乱

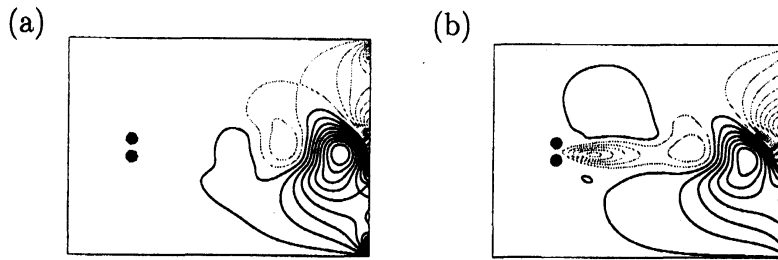


図 5: 攪乱の流れ場.  $\Gamma = 0.5$ . (a)  $Re = 50$ , (b)  $Re = 60$ .

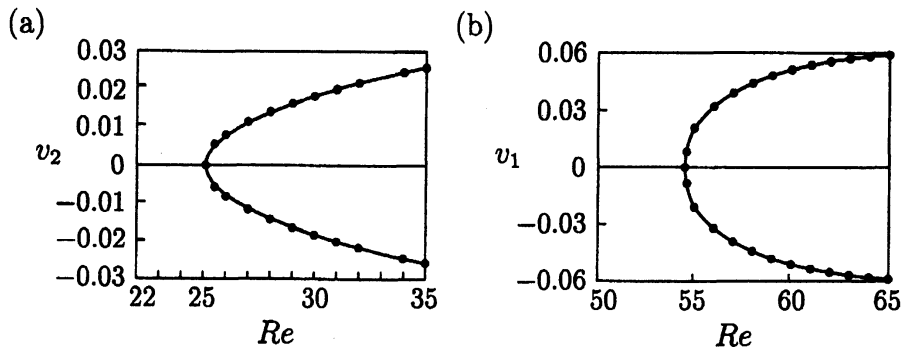


図 6: 分岐図.  $\Gamma = 0.5$ . (a) ホップ分岐. (b) ピッチフォーク分岐.

は定常攪乱であり、時間が経っても変化しないことをつけ加えておく。

このように、2つの領域で異なる遷移が生じていることを確認したので、それぞれの領域で起こっている遷移を詳しく調べるために、2円柱から離れた場所 ( $P_2$ ) での  $y$  方向速度  $v_2$  を用いて分岐図を描いてみると、図 6(a) のようになる。ここで、縦軸には振動振幅 (振動の最大値  $\overline{v_2}$  と最小値  $\underline{v_2}$ ) をとり、横軸にはレイノルズ数  $Re$  をとった。分岐図 6(a) では  $|\overline{v_2} - \underline{v_2}| \propto (Re - Re_c)^{1/2}$  の関係があり、その分岐構造はホップ分岐であることがわかった。なお、このときの臨界レイノルズ数は  $Re_c = 25.1$  であった。

レイノルズ数を  $Re = 60$  まで大きくすると、流れは2本の円柱を過ぎた直後で偏向し、かなり下流で振動する偏向振動流が確認された (図 3(c))。流速の時系列データ (図 4) によると、 $v_2$  は振動しているのに対して、 $v_1$  はほぼ一定の値をとることがわかっている。ここで、流れが偏向する原因を調べるために、点  $P_1$  における  $y$  方向速度  $v_1$  とレイノルズ数  $Re$  との関係を描いた (図 6(b))。その結果、この偏向振動流は臨界レイノルズ数を  $Re_c = 54.6$  とするピッチフォーク分岐によって生じていることが想像される。

数値シミュレーションの結果、この流れは  $Re_c = 25.1$  と  $Re_c = 54.6$  においてそれぞれホップ分岐とピッチフォーク分岐することが見いだされたが、ここで行っているような分岐解析は本来流れ場全体を特徴づける分岐であるはずなので、2つの分岐が独立に生じることは想像しがたい。すなわち、もし臨界レイノルズ数

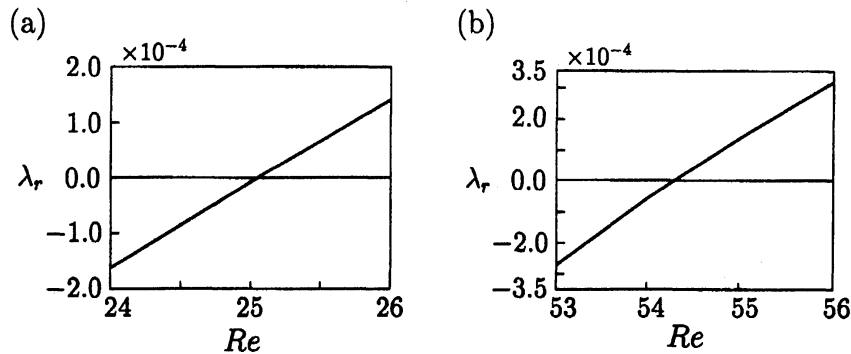


図 7: 線形増幅率  $\lambda_r$ .  $\Gamma = 0.5$ . (a) ホップ分岐. (b) ピッチフォーク分岐.

$Re_c = 25.1$  でホップ分岐が生じているなら, 次には振動流がさらに他の振動流へ遷移するはずである. したがって, ピッチフォーク分岐する前の流れは定常対称流であることを確認する必要がある. ここでは, これらの分岐が本当に対称定常流の不安定性により生じていることを確認するために, 対称定常流の線形安定性を調べる. そのために, 各レイノルズ数について, 方程式 (7) と (8) を解いて対称定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  を計算し, 線形攪乱方程式 (12) と (13) を適切な境界条件のもとで固有値問題として数値的に解いた.

線形固有値解析を行って複素線形固有値  $\lambda$  を求めた結果, 第 1 および第 2 増幅攪乱の固有値の実部すなわち線形増幅率  $\lambda_r$  は図 7(a) と 7(b) のようになった. 第 1 増幅攪乱は図 7(a) からわかるように, 臨界値  $Re_c = 25.1$  で不安定となる. また, 虚部  $\lambda_i$  は攪乱の角速度であり, 流れにおける振動の無次元振動数であるストローハル数  $St$  は  $St = \lambda_i / (2\pi)$  で求められるが, この範囲で  $St$  の値は約 0.073 であり, この不安定性は伝播波攪乱による不安定性でホップ分岐が生じていることになる. 図 7(b) で示されている第 2 増幅攪乱は  $Re_c = 54.4$  で不安定となる. この範囲で  $\lambda_i$  は 0 であることより, この攪乱は定在波攪乱に対する不安定性で, 不安定性の結果ピッチフォーク分岐を生じることがわかった. こうして, 1 つの流れ場の中で, 対称定常流に対する 2 つの不安定性が混在することが確認された.

間隔比  $\Gamma$  が 0.6 の場合には  $\Gamma = 0.5$  の場合とは異なり, レイノルズ数を少しずつ大きくしていくと, 流れは定常対称流から定常な非対称流へと遷移する. 図 8(a) は  $Re = 57$  のときの定常な流れパターンであり, 2 円柱の間を通り過ぎた直後流れは偏曲しているが下流へ行くと平行な流れとなっている. さらにレイノルズ数を大きくすると, 2 円柱のかなり後方で流れの中に振動が起こる. たとえば  $Re = 60$  では図 8(b) のような流れ場となる. すなわち, レイノルズ数を大きくしていくと, 対称定常流が非対称定常流となった後に, 偏向振動流へと遷移する.  $\Gamma = 0.5$  の場合と同様に数値シミュレーションデータの分岐解析と線形安定性解析を行った結果, 対称定常流は  $Re_c = 55.1$  (線形安定性解析では  $Re_c = 55.2$ ) で最初に定在波攪乱に対して不安定となり, ピッチフォーク分岐により定常非対称流となり,  $Re_c = 57.5$  で伝播波攪乱に対して不安定となってホップ分岐により偏向振動流となる. このように,  $\Gamma = 0.5$  の場合に流れは対称定常流が振動流となった

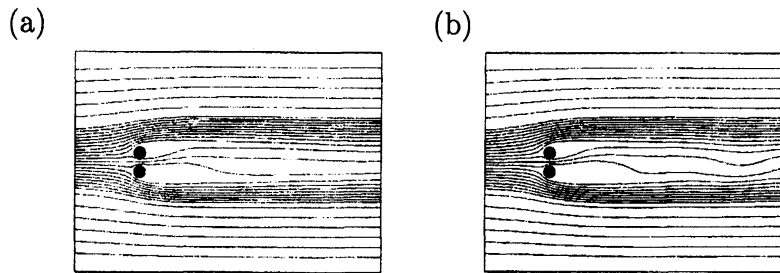


図 8: 流れパターン (流線).  $\Gamma = 0.6$ . (a) 非対称定常流,  $Re = 57$ . (b) 偏向振動流,  $Re = 60$ .

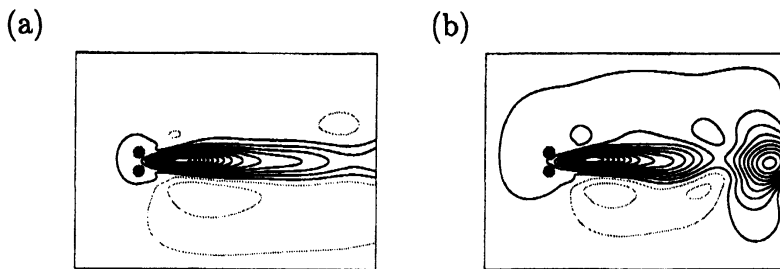


図 9: 攪乱の流れ場.  $\Gamma = 0.6$ . (a) 非対称定常流,  $Re = 57$ . (b) 偏向振動流,  $Re = 60$ .

後に、偏向振動流となったのに対して、 $\Gamma = 0.6$  ではホップ分岐とピッチフォーク分岐の順序すなわちそれぞれの臨界レイノルズ数の大きさが入れ替わっている。

間隔比をさらに少しだけ大きくして、 $\Gamma = 0.62$  の場合の流れの振る舞いを調べてみる。このときには、数値シミュレーションでは非対称定常流は出現しない。レイノルズ数を大きくすると流れは対称定常流から振動流へと遷移する (図 10)。ただし、このときの流れ場は  $\Gamma = 0.5$  の場合の  $Re = 50$  での流れ場 (図 3(b)) とは異なり、流れは 2 円柱後方のごく近傍で振動をしている。このことは、流速  $v_1$  (点  $P_1$ ) と  $v_2$  (点  $P_2$ ) の時系列データからも確認した。したがって、このときに流れを不安定にする攪乱は  $\Gamma = 0.5$  のときの攪乱とは異なるモードである可能性が想像される。 $\Gamma = 0.62$  の場合にも分岐解析を行って、臨界レイノルズ数  $Re_c = 54.5$  でホップ分岐が生じることがわかった。数値シミュレーションでは、このレイノルズ数よりも大きなレイノルズ数で非対称定常解を求めることはできないので、非対称定常解の直接計算を行って、 $Re_c = 55.4$  でピッチフォーク分岐が生じることを確認した。

これらの分岐をよりはっきりと理解するために  $Re = 55$  と  $60$  のときの攪乱の流れパターンを描くとそれぞれ図 11(a) と 11(b) のようになった。これらの図より、 $Re = 57$  では非線形攪乱の流れ場は  $x$  軸に対してほぼ対称であるが (図 11(a))、 $Re = 60$  ではピッチフォーク分岐の影響により非対称になっていることが確認できる (図 11(b))。また、攪乱の流れ場を  $\Gamma = 0.6$  ( $Re = 60$ , 図 9(b)) と  $\Gamma = 0.62$  ( $Re = 55$ , 図 11(a)) で比較しても、2つの攪乱場は明らかに異なることがわかる。 $\Gamma = 0.6$  では円柱のかなり後方で振動するが、 $\Gamma = 0.62$  では振動型攪乱は流れ場全体に広がっており、 $Re_c = 55.4$  で不安定となる定在波攪乱と同じ領域でも振動が

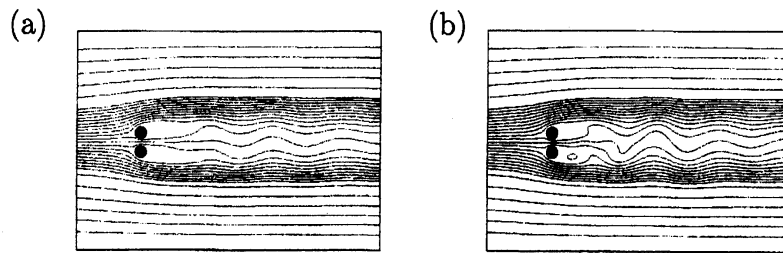


図 10: 流れパターン (流線).  $\Gamma = 0.62$ . (a) 同位相型振動流,  $Re = 55$ . (b) 偏向振動流,  $Re = 60$ .

起こっていることがわかる. つまり, 偏向振動流の範囲において,  $0.61 < \Gamma < 0.62$  の非常に狭い範囲で不安定攪乱の 2 つのモードが異なっており, 最も不安定な攪乱がもう一方へと変わっていることがわかる.

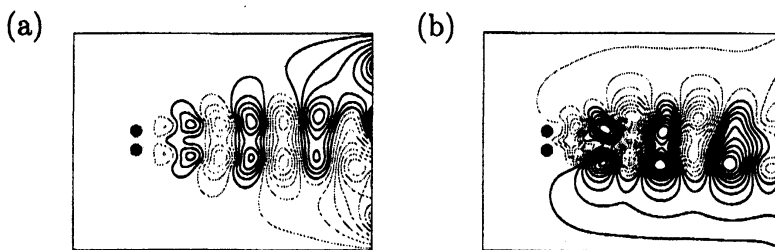


図 11: 攪乱の流れ場.  $\Gamma = 0.62$ . (a)  $Re = 55$ . (b)  $Re = 60$ .

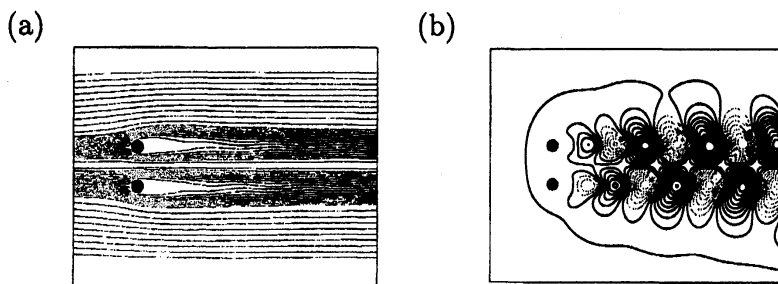


図 12: 逆位相型振動流.  $\Gamma = 2.5$ ,  $Re = 45$ . (a) 流れパターン. (b) 攪乱の流れパターン.

流れの分岐解析を間隔比  $\Gamma \leq 1$  の範囲で  $\Gamma$  のいろいろな値について繰り返し行い, その結果を整理すると図 13 のような遷移図となった. ここで,  $\circ$  と  $\bullet$  は数値シミュレーションと線形安定性解析により得られた結果をまとめたものであり, それぞれピッチフォーク分岐点とホップ分岐点を表している.  $\blacktriangle$  は Akinaga and Mizushima が求め逆位相型の振動モードの不安定性であり, 彼らの求めた同位相

型の振動モードはこの図では●に対応している。ただし、彼らはこの範囲の間隔比では計算を行っていないことを付け加えておく。同位相型の攪乱による不安定性の結果生じる振動流れ場は図10(a) ( $\Gamma = 0.62$ ,  $Re = 55$ ) に描かれているような流れ場であるが、逆位相型の攪乱により誘起される振動流れ場は図12(a)のような流れ場であり、そのときの対称定常流からの差分すなわち攪乱は図12(b)のように  $x$  軸に対して対称である。また、図中の点線は計算により求めたデータから2次のラグランジュ補間により外挿して描いた曲線である。Akinaga and Mizushimaの求めた結果も総合すると、対称定常流が最初に不安定となるモードは次のようにまとめられる。すなわち、 $\Gamma < 0.58$  のように2円柱間隔が非常に狭い場合には、2円柱は1本の円柱と同様の役割をして、対称定常流から振動流へと遷移する。このとき、2円柱後流近傍はほとんど振動をしない。  $0.58 < \Gamma < 0.62$  では、定在波攪乱による不安定性が最初に生じて、対称定常流は非対称定常流へ遷移する。  $0.62 < \Gamma < 2.34$  では、流れは同位相型の伝播波攪乱に対して不安定であり、2円柱後方のごく近くから流れの広い範囲で振動する振動流へ遷移する。  $2.3 < \Gamma$  では、流れは逆位相型の伝播波攪乱に対して不安定で、2円柱の両側から同期して渦が放出されて振動する振動流へ遷移する。

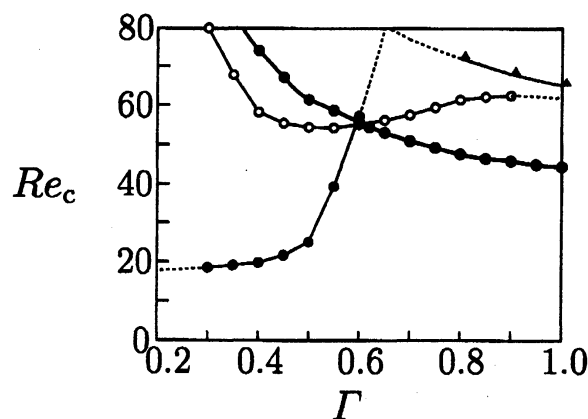


図 13: 遷移図. ○: ピッチフォーク分岐, ●: ホップ分岐. ▲: Akinaga and Mizushima[7].

## 7. まとめ

流れと垂直におかれた並列型2円柱を横切る流れについて数値シミュレーションと線形安定性解析によって解析を行って、その遷移を調べた。その幾何学的な配置は2本の円柱の中間点を通る流れと平行な中心線に対して対称であり、レイノルズ数が小さいときには対称な定常流が実現される。これまで、このような流れが不安定となるとときには、必ず振動流となると信じられてきた。ところが Ishigai *et al.* によって偏流した振動流が発見され、その起源は不明であった。本研究ではこの偏流した振動流の起源を小さいレイノルズ数における最初の不安定性に注目

して調べた結果, 対称定常流が定在波型攪乱に対して不安定となるピッチフォーク分岐の構造をこの流れがもっていることがこのような偏流した振動流の発生する起源であることを明らかにした. また, 2円柱間隔比とレイノルズ数の2つのパラメータの値がごく小さな範囲に入っているときには非対称な定常流が実現されることを示した. さらに, 間隔比が小さいときの伝播波攪乱には2つのモードがあり, 1つは2円柱直後から振動するこれまでによく知られた攪乱のモードと2円柱を1円柱と見なせるような攪乱のモードであり, このモードの攪乱による不安定性の結果生じる振動流は2円柱のかなり後方で振動する流れの振動パターンをもつことになる.

## 参考文献

- [1] Y. Ohya, A. Okajima and M. Hayashi. "Wake Interference and vortex shedding", *Encyclopedia of Fluid Mechanics* (Ed. N. P. Chermisinoff, Gulf Pub., Houston), 8 (1988) 323-389.
- [2] S. Ishigai, E. Nishikawa, K. Nishimura and K. Cho, "Experimental study on structure of gas flow in tube banks with tube axes normal to flow," *Bull. JSME*, 15, 949 (1972).
- [3] J. Mizushima and N. Suehiro, "Instability and transition of flow past two tandem circular cylinders", *Phys. Fluids*, 17 (2005) 104107-104107-11.
- [4] C. H. K. Williamson, "Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies", *J. Fluid Mech.*, 159 (1985) 1-18.
- [5] P. W. Bearman and A. J. Wadcock, "The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream", *J. Fluid Mech.*, 61 (1973) 499-511.
- [6] S. J. Xu, Y. Zhou and R. M. C. So, "Reynolds number effects on the flow structure behind two side-by-side cylinders", *Phys. Fluids*, 15 (2003) 1214-1219.
- [7] T. Akinaga, J. Mizushima "Linear Stability of Flow past Two Circular Cylinders in a Side-by-side Arrangement", *J. Phys. Soc. Jpn.*, 74 (2005) 1366-1369.
- [8] S. Kang, "Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds numbers", *Phys. Fluids*, 15 (2003) 2468-2498.
- [9] L. J. Steger and L. R. Sorenson, "Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equation", *J. Comp. Phys.*, 33 (1979) 405-410.